PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

Soit λ un nombre réel > 0. Dans un repère orthonormé Oxy du plan euclidien, on considère le graphe Γ_λ de la fonction f_λ, continue sur l'intervalle $[0, 1]$, et telle que l'on ait, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$f_\lambda(x) = \left(1 - x^{\frac{1}{\lambda}}\right)^\lambda.$$

On note A le point de coordonnées $x = 1$, $y = 0$, et B le point de coordonnées $x = 0$, $y = 1$.

I

1° Calculer les dérivées première et seconde de la fonction f_λ par rapport à x, et étudier leur signe pour $0 < x < 1$ en discutant selon la valeur de λ.

2° Préciser la nature géométrique des arcs de courbe Γ_1, $\Gamma_{1/2}$ et Γ_2.

3° *a.* Indiquer un axe de symétrie commun à toutes les courbes Γ_λ.

b. En fonction de λ, calculer l'abscisse du point S_λ de Γ_λ situé sur cet axe, ainsi que la valeur absolue du rayon de courbure à Γ_λ en ce point.

4° En fonction de λ, discuter si Γ_λ tourne sa concavité vers les $y > 0$ ou vers les $y < 0$.

5° Résumer les résultats obtenus par un graphique où figureront $\Gamma_{1/4}$, $\Gamma_{1/2}$, Γ_1, Γ_2 et Γ_4.

.../...

6° De l'étude qui précède, déduire que, si n est un entier $\geqslant 1$ et si a et b sont des nombres réels tels que $0 \leqslant a \leqslant 1$ et $0 \leqslant b \leqslant 1$, on a les inégalités :

$$(a+b)^n + \left(\sqrt[n]{1-a^n} + \sqrt[n]{1-b^n}\right)^n \leqslant 2^n$$

et

$$\sqrt[n]{a+b} + \sqrt[n]{\left(1-\sqrt[n]{a}\right)^n + \left(1-\sqrt[n]{b}\right)^n} \geqslant \sqrt[n]{2}.$$

II

Pour tout nombre réel $\lambda > 0$, on pose :

$$F(\lambda) = \lambda \int_0^1 t^{\lambda-1}(1-t)^\lambda \, dt.$$

1° Sans chercher à calculer cette intégrale, montrer qu'elle est convergente.

2° Montrer que l'aire du domaine borné enclos par Γ_λ, le segment OA de l'axe Ox et le segment OB de l'axe Oy, a pour mesure $F(\lambda)$.

3° *a.* En fonction de λ, calculer l'aire du triangle OAS_λ, et comparer $F(\lambda)$ à cette aire.

b. Quelle est la valeur des limites de $F(\lambda)$ quand $\lambda > 0$ tend vers 0? tend vers $+\infty$?

c. Du II 3° *a*, déduire que la série :

$$F(1) + F(2) + \ldots + F(n) + \ldots$$

converge, et que la somme σ de cette série est inférieure à 1.

4° Soit n un entier $\geqslant 1$. Calculer $F(n)$ successivement par les deux méthodes suivantes :

a. En se débarrassant du facteur t^{n-1} sous l'intégrale grâce à une suite d'intégrations par parties;

b. En développant $(1-t)^n$ par la formule du binôme de Newton avant d'intégrer.

En déduire la formule :

$$n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{C_n^k}{n+k} = \frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

où C_n^k désigne le nombre de combinaisons de n objets k à k.

III

On considère l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (4x - x^2)\frac{dy}{dx} - (x+2)y = x.$$

1° Montrer qu'il existe une série entière et une seule :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

de rayon de convergence $R \neq 0$, et dont la somme $y(x)$ soit, pour $|x| < R$, solution de (E). Pour cela, on cherchera une relation de récurrence entre a_{n-1} et a_n, et l'on en déduira la valeur des a_n. Que vaut R? Vérifier sur les résultats obtenus que $\sigma = y(1)$.

2° *a.* Calculer les primitives de la fonction $\sqrt{\frac{4-x}{x}}$, où $0 < x < 4$.

b. Trouver la solution générale de (E) pour $0 < x < 4$.

c. Parmi les solutions de (E) pour $0 < x < 4$, montrer qu'il en existe une et une seule telle que $\lim_{\substack{x>0 \\ x\to 0}} y(x)/x$ existe et soit finie, et en déduire que, pour $0 \leqslant x < 4$, on a la formule :

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n = \frac{1}{4-x}\left(x + 4\sqrt{\frac{x}{4-x}}\,\text{Arc sin}\sqrt{\frac{x}{4}}\right).$$

3° En déduire la valeur de σ.

IV

Déterminer une valeur du nombre réel $\lambda > 0$, de sorte que, pour tout point M de Γ_λ, les axes Ox et Oy découpent sur la tangente en M à Γ_λ un segment de longueur constamment égale à 1.

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail